Ορθογώνιοι πίνακες

$A^{-1} = \bar{A}^t$ στους πραγματικούς

$A^{-1} = A^t$

1. Οι γραμμές και οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση.
2. Το γινόμενο δύο ορθογωνίων είναι επίσης ορθογώνιος
3. $\det A = \pm 1$
4. $\langle u^t, v^t \rangle = \langle (Au)^t, (Av)^t \rangle$ όπου u, v στήλες.

- Άρα ένας ορθογώνιος πίνακας διατηρεί τα μήκη κ' τις γωνίες

$$\|u^t\|^2 = \langle u^t, u^t \rangle = \langle (Au)^t, (Au)^t \rangle = \|(Au)^t\|^2$$

- Η γωνία μεταξύ u κ' v: $\cos\phi = \dfrac{\langle u^t, v^t \rangle}{\|u^t\| \cdot \|v^t\|} = \dfrac{\langle (Au)^t, (Au)^t \rangle}{\|(Au)^t\| \cdot \|(Av)^t\|}$

είναι ίση με τη γωνία μεταξύ Au κ' Av

5. Οι ιδιοτιμές του, αν είναι πραγματικές είναι ± 1, ενώ αν είναι μιγαδικές έχουν μήκος 1.

Οι ορθογώνιοι πίνακες συμβολίζονται:

$O(n) = \{A \text{ ορθογώνιος}\} \rightarrow AA^t = I = A^t A$

$U(n) = \{A \text{ ορθομοναδιαίος}\} \rightarrow A\bar{A}^t = I = \bar{A}^t \cdot A$

$O(1) = \{1, -1\}$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2 = 1 \\ \gamma^2+\delta^2=1 \end{array} \text{ κ' } \alpha\gamma + \beta\delta = 0 \quad (1) \right\}$$

$\alpha^2+\beta^2=1$, $\gamma^2+\delta^2=1$. Ονομάζω $\alpha = \cos\phi$ $\quad \beta = \pm\sin\phi$

$\gamma = \cos\theta$ $\quad \delta = \pm\sin\theta$

- $a=\cos\phi,\ \beta=\sin\phi,\ \gamma=\cos\theta,\ \delta=\sin\theta$

$(1) \Rightarrow \cos\phi\cos\theta+\sin\phi\cdot\sin\theta=0 \Leftrightarrow \cos(\phi-\theta)=0$

$$\cos(\theta-\phi)=0 \Rightarrow \theta-\phi=\begin{cases}\pi/2\\ 3\pi/2\end{cases}$$

- $\theta-\phi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+\phi$

$\cos\theta=\cos(\frac{\pi}{2}+\phi)=\sin\phi$

$\sin\theta=\sin(\frac{\pi}{2}+\phi)=\cos\phi$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

$\boxed{\det A=1}$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\cos\phi-\lambda & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi-\lambda\end{pmatrix}=(\cos\phi-\lambda)^2+\sin^2\phi=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin\phi=0 < \begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\pi\end{matrix}\\ \cos\phi-\lambda=0 \Rightarrow \cos\phi=\lambda \Rightarrow \lambda=\cos\phi < \begin{matrix}\phi=1\\ \phi=-1\end{matrix}\end{cases}$$

Αυτό ισχύει όταν το λ είναι πραγματικός. Αν δεν είναι, τότε ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Η δράση του A στην κανονική βάση:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$

Ο A στρίβει το διάνυσμα κατά γωνία ϕ.

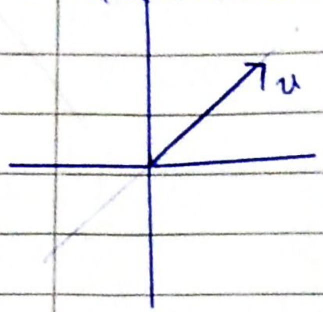
Με την άλλη περίπτωση θα έχω: $\cos(\phi+\theta)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi+\theta = < \begin{matrix}\pi/2\\ 3\pi/2\end{matrix}$ και ο $B=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}$

με $\boxed{\det B=1.}$

No. Date

Ο πίνακας A δεν αφήνει κάποιο διάνυσμα στο ίδιο φορέα του γιατί το στρίβει. Το Au βρίσκεται στον ίδιο φορέα αν: (σχήμα)



Άρα $Au = \lambda u$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Αδύνατον, γιατί το στρίβει.

Αυτός είναι ο γεωμετρικός λόγος, γιατί δεν έχει ιδιοτιμές.

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \quad \det B = A$$

$$\chi_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \cos\phi - \lambda & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \cos^2\phi - \sin^2\phi =$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

- $V(1)$: $\begin{pmatrix} \cos\phi - 1 & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

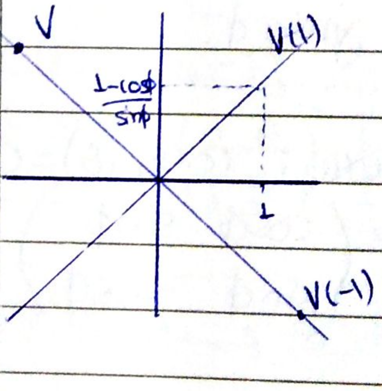
$$\Rightarrow (\cos\phi - 1)x + \sin\phi \cdot y = 0 \underset{\sin\phi \neq 0}{\Rightarrow} y = \frac{1-\cos\phi}{\sin\phi} x$$

$$V(1) = \left\langle \left(x, \frac{1-\cos\phi}{\sin\phi} x\right) \right\rangle = \left\langle \left(1, \frac{1-\cos\phi}{\sin\phi}\right) \right\rangle$$

- $V(-1)$: $\begin{pmatrix} \cos\phi + 1 & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\cos\phi + 1)x + \sin\phi\, y = 0 \underset{\sin\phi \neq 0}{\Rightarrow} y = \frac{1+\cos\phi}{\sin\phi} x$$

$u \in V(1) \Leftrightarrow Au = 1 \cdot u = u$ Άρα το u το αφήνει αναλλοίωτο.



Ο B τα διανύσματα που βρίσκονται πάνω στον $V(1)$ δεν τα μετακινεί, επειδή $V(1) \perp V(-1)$, αν $v \in V(-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow Bv = -v$

Ο πίνακας B είναι συμμετρία ως προς την ευθεία που δημιουργείται από τον υπόχωρο $V(1)$.

No. Date

Πχ: Οι επόμενοι πίνακες είναι ορθογώνιοι:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ δίνει συμμετρία ως προς το επίπεδο $\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ δίνει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}$ δίνει στροφή κατά γωνία ϕ στο επίπεδο $\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$

$-\sin\phi \quad \cos\phi$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ**: Ένας ορθογώνιος A απεικονίζει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση. ΔΛΔ αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε κ' το $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ στήλες απεικονίζει —"— —"— στήλες

* **Απόδειξη**: Για νδο το σύνολο $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση αρκεί να εξετάσω τα εσωτερικά γινόμενα.

No. Date

$*$ $\langle (Av_i)^t, (Av_j)^t \rangle = (Av_i)^t \cdot ((Av_j)^t)^t = v_i^t A^t A v_j' =$
γραμμές

$= v_i^t v_j = \langle v_i^t, v_j^t \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
ορθοκανονική βάση

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

● **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μια ισομετρία μεταξύ 2 Ευκλείδειων χώρων V^n κ' W^n είναι μια επί απεικόνιση T για την οποία ισχύει: $\langle v, u \rangle_V = \langle T(v), T(u) \rangle_W \quad \forall v, u \in V^n$

$T: V^n \to W^n \quad \forall w \in W, \exists v \in V$ με $T(v) = w$

- διατηρεί τα μήκη: $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle_V = \langle T(u), T(u) \rangle_W = \|T(u)\|^2$
- κ' τις γωνίες: Η γωνία μεταξύ u κ' v είναι:

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle T(u), T(v) \rangle}{\|T(u)\| \cdot \|T(v)\|}$$ γωνία $T(u)$ κ' $T(v)$

● **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Έστω $T: V^n \to W^n$ ισομετρία (1) τότε η T είναι 1-1 κ' γραμμική.

$*$ Απόδειξη: **a)** $u \neq v$ ($\Leftrightarrow u - v \neq 0$) $\Rightarrow T(u) \neq T(v)$

$\langle u-v, u-v \rangle = \langle u-v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \overset{(1)}{=}$

$= \langle T(u), T(u) \rangle - \langle T(v), T(u) \rangle - \langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle$

$= \langle T(u) - T(v), T(u) - T(v) \rangle = \|T(u) - T(v)\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \neq \|T(u) - T(v)\| \Leftrightarrow T(v) \neq T(u)$, άρα T: 1-1

Δείχνω κ' ότι η T είναι γραμμική. Ενδιαφέρομαι για γραμμικές ισομετρίες.

πχ: Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας σε ορθογώνιο

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \alpha \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \gamma \end{pmatrix}$$

(Δηλ. οι γραμμές του ή οι στήλες του να αποτελούν ορθοκανονική βάση)

$u_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $u_3=(\alpha,\beta,\gamma)$

$\|u_1\|=1 \qquad \|u_2\|=1 \qquad \langle u_1, u_2\rangle = 0$

No. Date

1ος τρόπος: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

$\langle u_1, u_3\rangle = 0 = \langle u_2, u_3\rangle$

2ος τρόπος: θέτω $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,1,0)$ διότι είναι γραμμ. ανεξάρτητο με το u_1 κ u_2 κ εφαρμόζω G-S

$$V_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, V_3\rangle}{\langle u_3, u_2\rangle} \cdot u_2 - \frac{\langle u_3, u_1\rangle}{\langle u_3, u_1\rangle} u_1 =$$

$$= (0,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 0 =$$

$$= \left(\frac{-2}{6}, 1-\frac{4}{6}, -\frac{2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\|V_3\|^2 = \frac{1}{3} \qquad V_3' = \frac{1}{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$